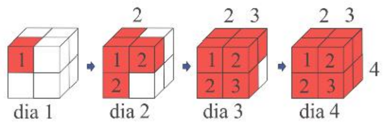
40ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

1. Um cubo $n \times n \times n$ é formado por n^3 cubinhos unitários e tem, inicialmente, um cubinho vermelho em somente um de seus vértices. Numeramos esse cubinho com o número 1. A cada dia a partir do dia 2, os cubinhos vizinhos (cubinhos com faces comuns) a cubinhos vermelhos também ficam vermelhos e são numerados com o número do dia.



Por exemplo, o cubo $2 \times 2 \times 2$ acima, no primeiro dia, tem um cubinho vermelho com o número 1, no segundo dia tem quatro cubinhos vermelhos, um com o número 1 e três com o número 2, no terceiro dia tem sete, um cubinho com o número 1, três com o número 2 e três com o número 3, e somente no quarto dia terá todos os seus cubinhos na cor vermelha. Para representar a numeração final podemos usar n tabuleiros representando cada uma n das camadas do cubo vistas de frente. Por exemplo, para o cubo $2 \times 2 \times 2$ acima temos as seguintes camadas:

1	2
2	3

2	3
3	4

a) Na figura a seguir temos as quatro camadas do cubo $4 \times 4 \times 4$ e os cubos numerados com 1 e 2. Copie esses 4 tabuleiros no caderno de respostas e preencha os números de cada cubinho.

1	2		
2			

2			

b) Em um cubo $10 \times 10 \times 10$, quantos cubinhos são numerados com 7? E quantos são numerados com 13?

c) Em um cubo $2018 \times 2018 \times 2018$, qual o número que aparece mais vezes na numeração dos cubinhos? (Se houver mais de um número que aparece o maior número de vezes liste todos.)

---

2. Uma quádrupla (A, B, C, D) é dita *dobarulho* quando A, B e C são algarismos não nulos e D é um inteiro positivo tais que:

1. $A \leq 8$.
2. $D > 1$.
3. D divide os seis números de três algarismos $\overline{ABC}$, $\overline{BCA}$, $\overline{CAB}$, $\overline{(A+1)CB}$, $\overline{CB(A+1)}$ e $\overline{B(A+1)C}$.

Determine todas as quádruplas *dobarulho*.

Observação: Estamos usando uma barra para distinguir a representação decimal do número de três algarismos $\overline{ABC}$ do produto $A \cdot B \cdot C$. Por exemplo, se $\overline{ABC} = 126$, então $A = 1$, $B = 2$ e $C = 6$.

---

3. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferência de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triângulo ABC. Defina de maneira análoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simétricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes.

40ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

4.

a) Num triângulo XYZ, o incírculo tangencia os lados XY e XZ nos pontos T e W, respectivamente. Prove que

$$XT = XW = \frac{XY + XZ - YZ}{2}.$$

Seja ABC um triângulo e D o pé da altura relativa ao lado A. Sejam I e J os incentros dos triângulos ABD e ACD, respectivamente. Os incírculos de ABD e ACD tangenciam AD nos pontos M e N, respectivamente. Seja P o ponto de tangência do incírculo inscrito de ABC com o lado AB. O círculo de centro A e raio AP intersecta a altura AD em K.

b) Mostre que os triângulos IMK e KNJ são congruentes.

c) Mostre que o quadrilátero $IDJK$ é inscritível.

5. Numa lousa estão escritos inicialmente os números $1, 2, \ldots, 10$. Para quaisquer dois números a e b na lousa chamamos de $S_{a,b}$ a soma de todos os números na lousa com exceção de a e b. Uma operação permitida é escolher dois números a e b na lousa, apagá-los e escrever o número $a + b + \dfrac{ab}{S_{a,b}}$. Após realizar essa operação algumas vezes restam na lousa apenas dois números x e y, com $x \geq y$.

a) Quantas operações foram realizadas?

b) Determine o maior valor possível para x.

6. Para todo inteiro positivo n definimos $s(n)$ como a soma dos dígitos de n. Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos para os quais

$$s(an + b) - s(n)$$

assume um número finito de valores ao variar n nos inteiros positivos.