40ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Dizemos que um polígono P está *inscrito* em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q. Também dizemos nesse caso que Q é *circunscrito* a P. Dado um triângulo T, sejam ℓ o máximo valor do lado de um quadrado inscrito em T e L o mínimo valor do lado de um quadrado circunscrito a T. Prove que, para todo triângulo T, vale a desigualdade $L/\ell \geq 2$, e encontre todos os triângulos T para os quais a igualdade ocorre.

---

2. Azambuja escreve um número racional q em uma lousa. Uma operação consiste em apagar q e substituí-lo por $q+1$; ou por $q-1$; ou por $\frac{q-1}{2q-1}$ se $q \neq \frac{1}{2}$. O objetivo final de Azambuja é escrever o número $\frac{1}{2018}$ após realizar uma quantidade finita de operações.

a) Mostre que se o número inicial escrito é 0, então Azambuja não poderá alcançar seu objetivo.

b) Encontre todos os números iniciais para os quais Azambuja pode atingir seu objetivo.

---

3. Sejam k, n inteiros positivos fixados. Em uma mesa circular, são colocados n pinos numerados sucessivamente com os números $1, \ldots, n$, com 1 e n vizinhos. Sabe-se que o pino 1 é dourado e os demais são brancos. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo, em que uma argola é colocada inicialmente em um dos pinos e a cada passo ela muda de posição. O jogo começa com Bernaldo escolhendo um pino inicial para a argola, e o primeiro passo consiste no seguinte: Arnaldo escolhe um inteiro positivo d qualquer e Bernaldo desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário (as posições são consideradas módulo n, ou seja, os pinos x, y são iguais se e somente se n divide $x - y$). Após isso, a argola muda de pinos de acordo com uma das seguintes regras, a ser escolhida em cada passo por Arnaldo:

Regra 1: Arnaldo escolhe um inteiro positivo d qualquer e Bernaldo desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Regra 2: Arnaldo escolhe um sentido (horário ou anti-horário), e Bernaldo desloca a argola nesse sentido em d ou kd pinos, onde d é o tamanho do último deslocamento realizado.

Arnaldo vence se, após um número finito de passos, a argola é deslocada para o pino dourado. Determine, em função de k, os valores de n para os quais Arnaldo possui uma estratégia que garanta sua vitória, não importando como Bernaldo jogue.

40^{a} OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Esmeralda escreve $2n$ números reais $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, todos pertencentes ao intervalo $[0,1]$, ao redor de um círculo e multiplica todos os pares de números vizinhos entre si, obtendo, no sentido anti-horário, os produtos $p_1 = x_1x_2, p_2 = x_2x_3, \ldots, p_{2n} = x_{2n}x_1$. Ela soma os produtos de índice par e subtrai os produtos de índice ímpar. Qual é o maior resultado que Esmeralda pode obter?

---

5. Considere a sequência em que $a_1 = 1$ e a_n é obtido justapondo ao final da representação decimal de a_{n-1} a representação decimal de n. Ou seja: $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 123, \ldots, a_9 = 123456789, a_{10} = 12345678910$ e assim sucessivamente. Prove que infinitos termos dessa sequência são múltiplos de 7.

---

6. Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.