MATEMATICAMENTE

Mais alguns problemas da IMO

11. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ círculos de raio 1 no plano, com $n \geq 3$. Sejam $O_1, O_2, \ldots, O_n$, respectivamente, os seus centros. Suponha que nenhuma reta corta mais de 3 desses círculos. Prove que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

12. Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de 2/5 dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

13. Seja $P(x)$ um polinomio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinomio

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x)) \ldots)),$$

onde P aparece k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

14. Sejam a e b inteiros positivos. Prove que se $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$, então $a = b$.

15. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para todos os números $x, y \in \mathbb{R}$.

16. Seja n um inteiro positivo e sejam $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) inteiros distintos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tais que n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demonstre que n não divide $a_k(a_1 - 1)$.

17. Seja $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

18. Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).