MATEMATICAMENTE

Alguns Problemas da IMO (2006 – 2018)

1. Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

2. Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\dfrac{N}{M}$.

3. Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.

4. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em $\mathcal{S}$ não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do *pivot* P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de $\mathcal{S}$, que denotaremos por Q. Com Q como novo pivot, a reta continua a rodar no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de $\mathcal{S}$. Este processo continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de $\mathcal{S}$. Demonstre que se pode escolher um ponto $P \in \mathcal{S}$ e uma reta ℓ que passa por P tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de $\mathcal{S}$ como pivot infinitas vezes.

5. Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

6. Seja A_1 o ponto de tangência do excírculo do triângulo ABC oposto ao vértice A com o lado BC. Definem-se os pontos B_1 em CA e C_1 em AB, de modo análogo, utilizando os excírculos opostos a B e a C, respectivamente. Suponha que o circuncentro do triângulo $A_1B_1C_1$ pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Demonstrar que o triângulo ABC é retângulo.

7. Dizemos que um conjunto finito $\mathcal{S}$ de pontos do plano é *equilibrado* se, para cada dois pontos diferentes A e B de $\mathcal{S}$, existe um ponto C de $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é *descentrado* se, para cada três pontos diferentes A, B e C de $\mathcal{S}$, não existe um ponto P de $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

(a) Prove que, para todos os inteiros $n \geq 3$, existe um conjunto equilibrado com exatamente n pontos.

(b) Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existe um conjunto equilibrado e descentrado com exatamente n pontos.

8. Um conjunto de números inteiros positivos é chamado *fragante* se contém pelo menos dois elementos e cada um de seus elementos tem algum fator primo em comum com pelo menos um dos elementos restantes. Seja $P(n) = n^2 + n + 1$. Determine o menor número inteiro positivo b para o qual exista algum número inteiro não negativo a tal que o conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

seja fragante.

9. Para cada inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que, para cada $n \leq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro,} \\ a_n + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

10. Um *local* é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20. Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra. Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.