Live Matematicamente
Problema 6 da IMO 2003

Samuel Feitosa

Exercício 1. (Putnam 1972) Prove que não existe inteiro positivo $n > 1$ tal que $n|2^n - 1$.

Exercício 2. (Leningrado 1990) Prove que para todos os inteiros $a > 1$ e n , $n|\phi(a^n - 1)$.

Exercício 3. Mostre que se $k > 1$ então $2^{k-1} \not\equiv -1 \pmod k$

Exercício 4. Prove que todos os divisores dos números de Fermat $2^{2^n} + 1$, $n > 1$, são da forma $2^{n+2}k + 1$.

Teorema 1 (Euler) Um inteiro a satisfazendo $mdc(a, p) = 1$ é o resíduo de uma potência n-ésima nódulo p se e somente se vale a relação:

$$a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod p \text{ com } d = mdc(p-1, n).$$

Exercício 5. (IMO 2003) Seja p um número primo. Demonstre que existe um número primo q tal que, para todo inteiro n, o número $n^p - p$ não é divisível por q.

Exercício 6. (IMO 2003 - Adaptado) Seja p um número primo. Demonstre que existem **infinitos** primos q tal que, para todo inteiro n, o número $n^p - p$ não é divisível por q.

Exercício 7. (TST - China - 2004) Determine todos os inteiros positivos m satisfazendo a seguinte propriedade: existe um primo q_m tal que $n^m - m$ não é divisível por q_m para qualquer inteiro n.

Exercício 8. (Propriedades dos Polinômios Ciclotômicos)

1. $\Phi_n(X) = \prod_{d|n}(X^{\frac{n}{d}} - 1)^{\mu(d)}$.
2. $\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots X + 1$, se p é primo.
3. Se $n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$, então
$$\Phi_n(X) = \Phi_{p_1 p_2 \cdots p_k}(X^{p_1^{c_1-1} p_2^{c_2-1} \cdots p_k^{c_k-1}}).$$
4. Se $n > 1$ é ímpar, então $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$.
5. Se p é um primo que não divide n, então
$$\Phi_{pn}(X) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)},$$
caso contrário, se $p \mid n$, $\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p)$.

Exercício 9. Seja n um inteiro positivo e x um inteiro qualquer. Mostre que todo divisor primo p de $\Phi_n(X)$ ou satisfaz $p \equiv 1 \pmod n$ ou $p \mid n$.

Teorema 2 Seja p um número primo. Então para todos os inteiros positivos n e a tais que $mdc(n, p) = 1$ temos $p \mid \Phi_n(a)$ se, e somente se, $ord_p(a) = n$.

Exercício 10. Seja p um número primo e x um inteiro qualquer. Então todo divisor primo q de $1 + x + \cdots + x^{p-1}$ ou satisfaz $q \equiv 1 \pmod p$ ou $p = q$.

Exercício 11. Sejam a e b inteiros positivos. Suponha que x é um inteiro e que $mdc(\Phi_a(X), \Phi_b(X)) > 1$. Então $\frac{a}{b} = p^k$ para algum número primo p e algum inteiro k.