Ideias para a OBM

Problema 1:

Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a+b+c=0$. Calcule os possíveis valores de $\dfrac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)}{\left(a^5+b^5+c^5\right)^2}$.

Problema 2:

Denominamos *reticulado* ao conjunto $\mathbb{Z}^2$ dos pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano. Um ponto (x,y) do reticulado é dito *visível* se x e y são primos entre si, e *invisível* caso contrário. Prove que, para todo número real positivo d, existe um ponto do reticulado cuja distância a qualquer ponto visível é maior do que d.

Problema 3:

Dois discos A e B são divididos em $2n$ setores iguais. No disco A, n setores são pintados de azul e n de vermelho. No disco B, os setores são pintados de azul ou vermelho de forma completamente arbitrária. Mostre que A e B podem ser superpostos de modo que pelo menos n setores tenham cores coincidentes.

Problema 4:

Considere um losango $ABCD$ e sua circunferência inscrita ω. Uma reta tangente a ω corta os segmentos AB e BC nos pontos E e F, respectivamente. Outra reta também tangente a ω corta os segmentos CD e DA nos pontos G e H, respectivamente. Prove que as retas EH e FG são paralelas.