

42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA



1. Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC . A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intersecta o segmento DC em E . Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE . Se $\angle BAE = 45^\circ$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.

2. Em uma lousa encontra-se o seguinte texto:

$$\text{A equação } x^2 - 824x + \blacksquare 143 = 0 \text{ possui duas soluções inteiras.}$$

Onde \blacksquare representa alguma quantidade de algarismos de um número que está borrada na lousa. Quais são as possíveis equações originalmente na lousa?

3. Consideremos uma sequência infinita x_1, x_2, \dots de números inteiros positivos tais que, para todo inteiro $n \geq 1$:

- Se x_n é par, então $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$;
- Se x_n é ímpar, então $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2} + 2^{k-1}$, onde k é o inteiro tal que $2^{k-1} \leq x_n < 2^k$.

Determine o menor valor possível de x_1 para o qual a sequência contenha algum termo igual a 2020.

42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA



4. Um número inteiro positivo é dito *cilíndrico* se o primeiro algarismo e o último algarismo de sua representação decimal são iguais. Por exemplo, 4 e 4104 são cilíndricos, pois os seus primeiros e últimos algarismos são 4, mas 10 não é cilíndrico, pois o seu primeiro algarismo é 1, enquanto o seu último algarismo é 0.

Um número cilíndrico é dito *supercilíndrico* se pode ser escrito como a soma de dois números cilíndricos. Por exemplo $101 = 99 + 2$ e $22 = 11 + 11$ são supercilíndricos, mas $561 = 484 + 77$ não é supercilíndrico, pois não é cilíndrico.

Quantos números de 4 algarismos são supercilíndricos?

5. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O . Seja M o ponto médio de AB e $K \neq C$ o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos ABC e CMO . As retas CK e OM encontram-se em P . Prove que $\angle KAP = \angle MCB$.

6. Seja k um número inteiro positivo. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo em um tabuleiro 2020×2020 . Inicialmente todas as casas do tabuleiro estão vazias. Uma jogada consiste em escolher uma casa vazia e colocar nesta uma ficha azul ou uma ficha vermelha.

Arnaldo vence o jogo se em algum momento existirem k casas consecutivas em uma mesma linha ou coluna preenchidas com fichas de uma mesma cor. Bernaldo vence se todo o tabuleiro é preenchido sem que Arnaldo vença. Arnaldo é o primeiro a jogar e, a partir de então, cada jogador joga alternadamente.

Quais são os valores de k para os quais Arnaldo tem uma estratégia vencedora?