

42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA



4. Um número inteiro positivo é dito *cilíndrico* se o primeiro algarismo e o último algarismo de sua representação decimal são iguais. Por exemplo, 4 e 4104 são cilíndricos, pois os seus primeiros e últimos algarismos são 4, mas 10 não é cilíndrico, pois o seu primeiro algarismo é 1, enquanto o seu último algarismo é 0.

Um número cilíndrico é dito *supercilíndrico* se pode ser escrito como a soma de dois números cilíndricos. Por exemplo $101 = 99 + 2$ e $22 = 11 + 11$ são supercilíndricos, mas $561 = 484 + 77$ não é supercilíndrico, pois não é cilíndrico.

Quantos números de 4 algarismos são supercilíndricos?

5. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O . Seja M o ponto médio de AB e $K \neq C$ o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos ABC e CMO . As retas CK e OM encontram-se em P . Prove que $\angle KAP = \angle MCB$.

6. Seja k um número inteiro positivo. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo em um tabuleiro 2020×2020 . Inicialmente todas as casas do tabuleiro estão vazias. Uma jogada consiste em escolher uma casa vazia e colocar nesta uma ficha azul ou uma ficha vermelha.

Arnaldo vence o jogo se em algum momento existirem k casas consecutivas em uma mesma linha ou coluna preenchidas com fichas de uma mesma cor. Bernaldo vence se todo o tabuleiro é preenchido sem que Arnaldo vença. Arnaldo é o primeiro a jogar e, a partir de então, cada jogador joga alternadamente.

Quais são os valores de k para os quais Arnaldo tem uma estratégia vencedora?