42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Prove que existem inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{2020a_{2020}} = 1.$$

---

2. Para a inteiro positivo, defina $F_1^{(a)} = 1$, $F_2^{(a)} = a$ e, para $n > 2$, $F_n^{(a)} = F_{n-1}^{(a)} + F_{n-2}^{(a)}$. Um inteiro positivo é *fibonático* quando é igual a $F_n^{(a)}$ para algum a inteiro positivo e algum $n > 3$. Prove que existem infinitos números inteiros que não são fibonáticos.

---

3. Sejam r_A, r_B e r_C semirretas de origem P. O círculo ω_a, de centro X, é tangente a r_B e r_C; o círculo ω_b, de centro Y, é tangente a r_C e r_A; e o círculo ω_c, de centro Z, é tangente a r_A e r_B. Suponha que P está no interior do triângulo XYZ, de modo que r_A, r_B e r_C sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam s_A a reta tangente internamente a ω_b e ω_c que não contém r_A, s_B a reta tangente internamente a ω_c e ω_a que não contém r_B e s_C a reta tangente internamente a ω_a e ω_b que não contém r_C. Prove que s_A, s_B e s_C têm um ponto comum Q, e prove que P e Q são conjugados isogonais no triângulo XYZ, ou seja, as retas XP e XQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle YXZ$ e as retas YP e YQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle XYZ$.