

# 42ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA



4. Seja  $ABC$  um triângulo. Os círculos ex-inscritos (que tangenciam um lado e os prolongamentos de outros dois lados) tocam os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $U$ ,  $V$  e  $W$ , respectivamente. Sejam  $r_u$  a reta que passa por  $U$  e é perpendicular a  $BC$ ,  $r_v$  a reta que passa por  $V$  e é perpendicular a  $CA$  e  $r_w$  a reta que passa por  $W$  e é perpendicular a  $AB$ . Prove que as retas  $r_u$ ,  $r_v$  e  $r_w$  passam por um mesmo ponto.

5. Sejam  $n$  e  $k$  números inteiros positivos com  $k \leq n$ . Em um grupo de  $n$  pessoas, cada uma ou sempre fala a verdade ou sempre mente. Arnaldo pode fazer perguntas para quaisquer dessas pessoas desde que essas perguntas sejam do tipo: "No conjunto  $A$ , qual a paridade de pessoas que falam a verdade?", onde  $A$  é um subconjunto de tamanho  $k$  do conjunto das  $n$  pessoas. A resposta só pode ser "par" ou "ímpar".

(a) (4 pontos) Para quais valores de  $n$  e  $k$  é possível determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem?

(b) (6 pontos) Qual o número mínimo de perguntas necessárias para determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem, quando esse número é finito?

6. Sejam  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ ,  $f^0(x) = x$  e  $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$  para todo  $x$  real e  $n \geq 0$  inteiro (ou seja,  $f^n$  é a  $n$ -ésima iterada de  $f$ ).

(a) (2 pontos) Determine o número de soluções reais distintas da equação de  $f^3(x) = x$ .

(b) (8 pontos) Determine, para cada  $n \geq 0$  inteiro, o número de soluções reais distintas da equação  $f^n(x) = 0$ .