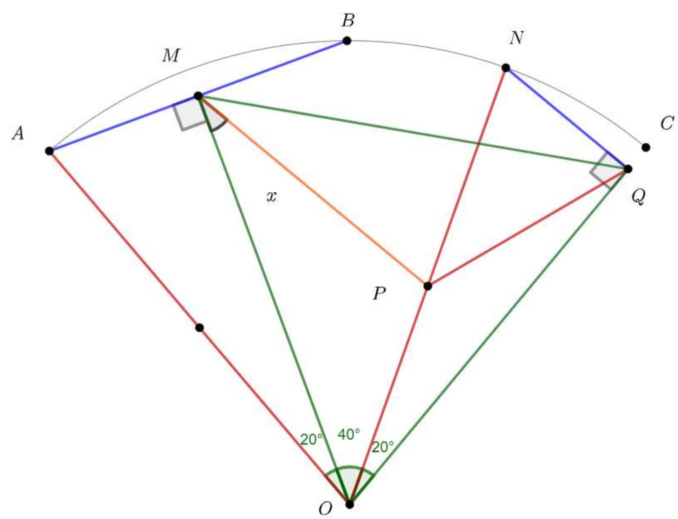
Nome: Cleiton Almeida Ataide
Email: ataidecaa@gmail.com

Problema 6. Sejam A, B e C vértices consecutivos de um eneágono regular inscrito em um círculo de centro O. Os pontos M, N e P são, respectivamente, pontos médios da corda $\overline{AB}$, do menor arco $\widehat{AB}$ e do raio $\overline{ON}$. Calcule a medida do ângulo $\angle OMP$.



Solução:

1. *Como são pontos de um eneágono, o* $\angle AOM = 20^\circ$ *e* $\angle MON = 40^\circ$.

2. *Note que o* ΔAOM é *retângulo em* M.

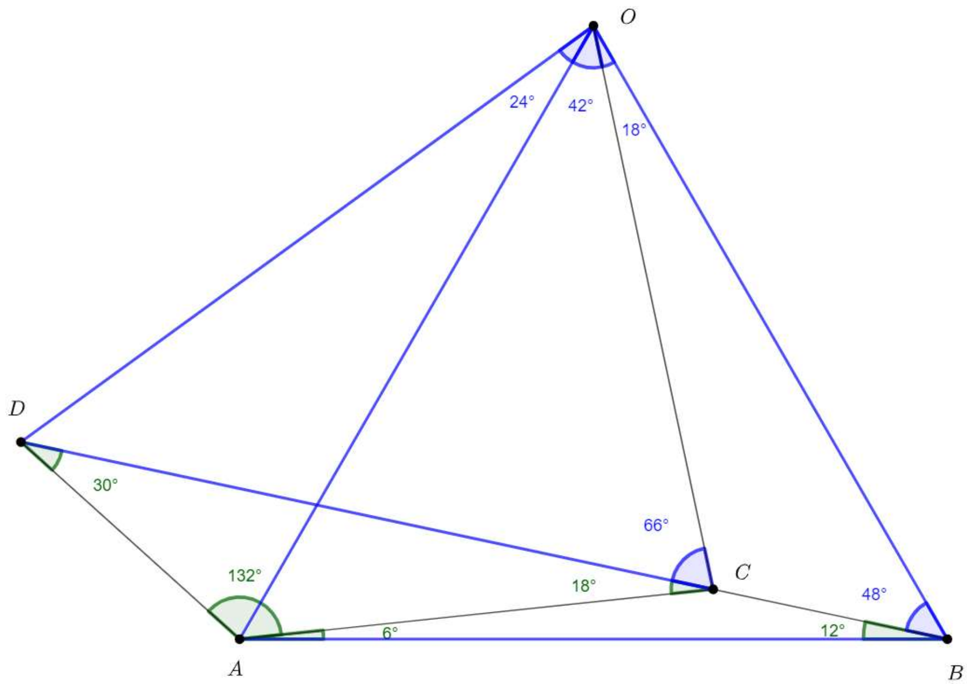
3. *Tome* Q*, tal que* $\Delta NOQ \equiv \Delta AOM$. *Logo,* $\angle NOQ = 20^\circ$.

4. *Assim, o* ΔMOQ é *equilátero.*

5. *Trace* $\overline{PQ}$. *Note que este segmento* é *mediana em relação* à *hipotenusa* $\overline{NO}$.
   Logo, $\overline{PQ} = \overline{OP}$, *e por conseguinte* $\overline{MP}$ é *mediatriz de* $\overline{OQ}$.

6. *Finalmente,* $2x = 60^\circ \quad \therefore \quad x = 30^\circ$

Problema 5 Um triângulo ABC é tal que $\widehat{A} = 6°$ e $\widehat{B} = 12°$. Seja D um ponto na semirreta BC tal que $\angle CAD = 132°$. Prove que $\overline{AB} = \overline{CD}$.



<u>**Solução:**</u>

1. *Note que* $\angle ECA = 18°$ *e* $\angle BDA = 30°$.

2. *Seja* O, *o circuncentro do* ΔDAB. *Assim,* ΔOAB *será equilátero, pois* $\angle BDA = 30°$.

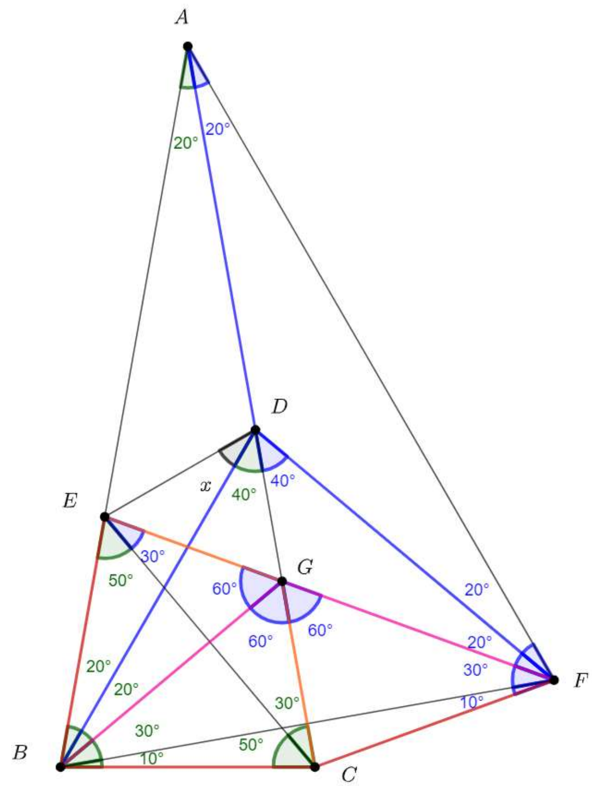
3. *Note que* $\angle AOD = 24°$, *pois* $\angle ABD = 12°$.

4. *Perceba que o* ΔOAB *é o triângulo de Mustafa Yagci.*
   Logo, $\angle BCO = 18°$ *e* $\angle COA = 42°$.

5. *Assim,* $\angle DCO = 66°$, *pois é externo ao* ΔCBO.

6. *Finalmente, note* ΔODC *é isósceles de base OC. Logo,* $\overline{CD} = \overline{OD} = \overline{AB}$. $(c.q.d)$

Problema 4. (Triângulo russo / Triângulo de Langley) Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, tal que $\widehat{A} = 20^\circ$. Sejam D e E, respectivamente, pontos sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ tais que $\angle DBC = 60^\circ$ e $\angle ECB = 50^\circ$. Calcule a medida do ângulo $\angle EDB$.



__Solução:__

Olhando com cuidado a figura, para quem já está mais acostumado com as soluções por construções, três coisas se destacam: os triangulos isósceles ΔBCE e ΔABD, e o ângulo de 30°. Assim, minha solução tentou explorar esses elementos.

1. *Com o ojetivo de aumentar a simetria na figura, tome F tal que o ΔADF seja o simétrico do ΔABD com relação à $\overline{AD}$. Com efeito, $\overline{AC}$ mediatriz de $\overline{BF}$.*

2. *Assim,* $\angle FDC = \angle CDB = 40^\circ$, $\angle BFD = \angle DBF = 50^\circ$, $\angle CFB = \angle FBC = 10^\circ$.

3. *Agora, explorando o ΔEBC, tracemos bissetriz de $\angle EBC$, que pelo fato de ΔEBC ser isósceles, esta será também mediatriz de $\overline{EC}$. Note que ela intercepta $\overline{AC}$ em G.*

4. *Note que G está conectado ao ângulo de 30° e como está sobre a mediatriz de $\overline{EC}$,* $\angle ECG = \angle GEC = 30^\circ$. *Com efeito,* $\angle CGB = \angle BGE = 60^\circ$.

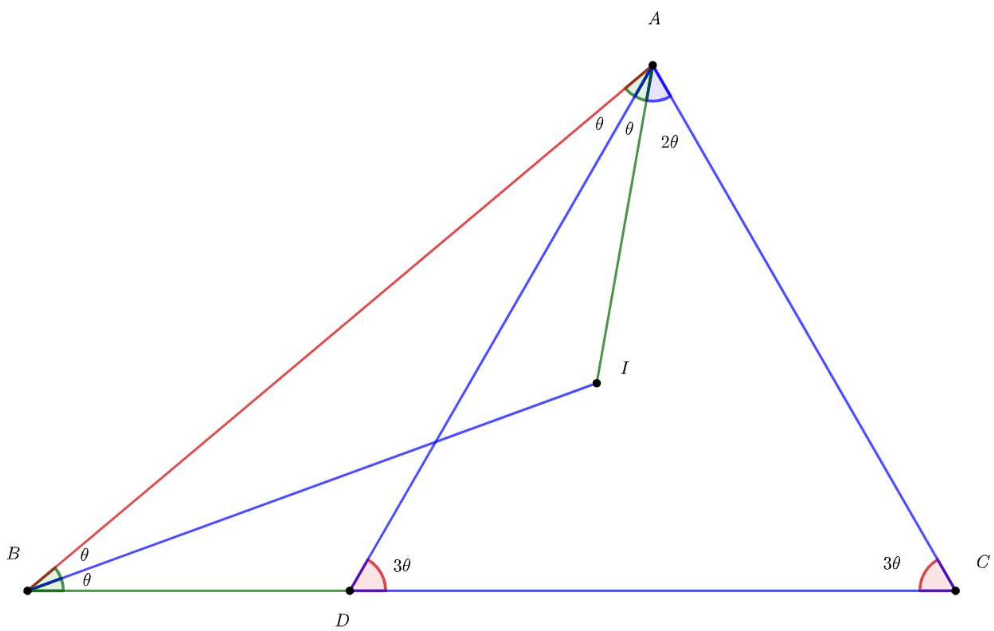
5. *Porém G também está sobre a mediatriz de $\overline{BF}$. Logo,* $\angle GBF = \angle BFG = 30^\circ$ *e* $\angle FGC = 60^\circ$.

6. $Note\ que\ \angle CGB + \angle BGE + \angle FGC = 180^\circ.\ Portanto,\ F,\ G\ e\ E\ \text{são}\ colineares$
$e\ \angle EFD = \angle GFD = 20^\circ.$

7. $Aqui\ temos\ duas\ \text{opções}\ para\ terminar\ a\ \text{questão}:$
$a)\ notar\ que\ D\ \text{é}\ incentro\ de\ \Delta AEF;\ ou\ b)\ notar\ que\ o\ \text{quadrilátero}\ EBFD\ \text{é}\ \text{inscritível}.$
$Escolhendo\ a\ b).$

8. $Note\ que\ em\ sendo\ EBFD\ \text{é}\ \text{inscritível},\ \angle BDE\ e\ \angle BFE\ enxergam\ o\ mesmo$
$segmento\ \overline{BE},\ em\ EBFD.\ Assim,\ \angle BDE\ = \angle BFE\ \ \therefore\ \ x = 30^\circ.$

Problema 3. Os ângulos B̂ e Ĉ de um triângulo ABC estão entre si na razão de 2 para 3. Seja **I** o incentro de ABC, e suponha que BI=AC. Calcule os ângulos do triângulo ABC.



Solução:

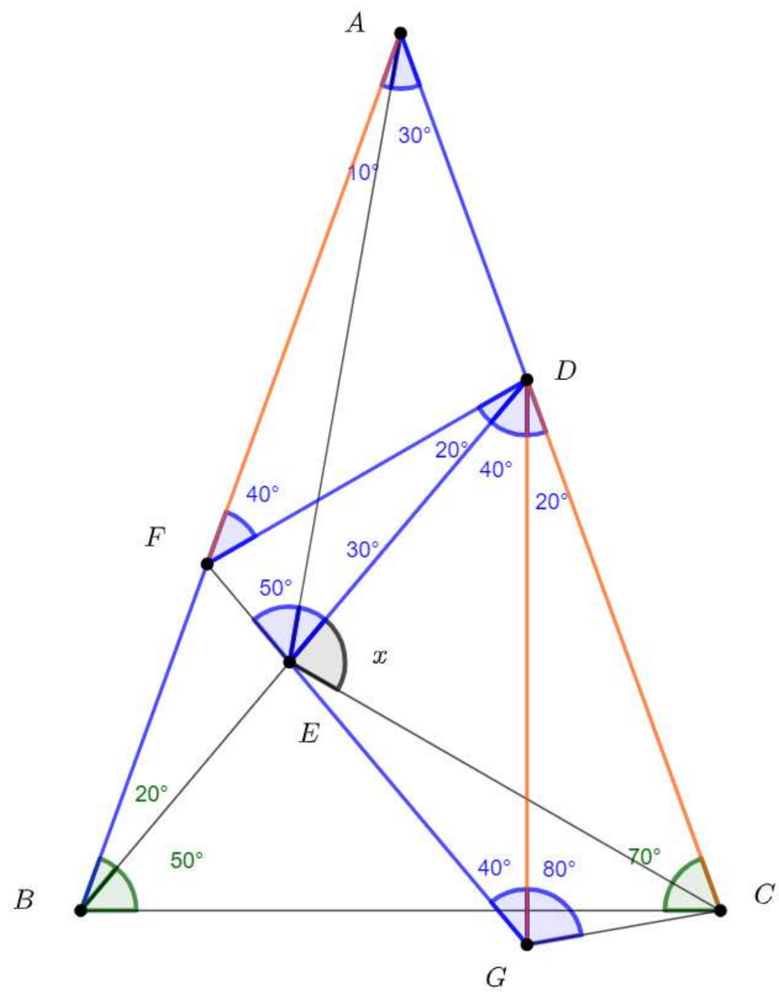
1. $Tome\ D\ sobre\ BC,\ tal\ que\ \overline{AD} = \overline{AC}.\ Logo,\ \angle DAB = \theta.$

2. $Note\ que\ \Delta ABD \equiv \Delta BAI,\ pelo\ caso\ L.A.L.\ Assim,\ \angle IAB = \angle DBA = 2\theta,$
$e\ consequentemente\ \ IAD = \theta.$

3. $Como\ I\ \text{é}\ incentro,\ \angle IAC = \angle IAB = 2\theta.\ Logo,\ \Delta ADC\ \text{é}\ \text{equilátero},\ com\ 3\theta = 60^\circ$
$\therefore\ \ \theta = 20^\circ.$

4. $Finalmente,\ os\ \text{ângulos}\ do\ \text{triângulo}\ ABC\ \text{são}\ \widehat{A} = 80^\circ,\ \widehat{B} = 40^\circ\ e\ \widehat{C} = 60^\circ.$

Problema 2. Em um triângulo ABC, o ângulo interno $\widehat{A}$ mede 40° e $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sobre o lado $\overline{AC}$ toma-se um ponto D tal que $\angle ABD = 20^\circ$. Seja E um ponto do segmento $\overline{BD}$ tal que $\overline{DE} = \overline{DA}$. Calcule a medida do ângulo $\angle DEC$.



__Solução:__

1. *Como o ΔABC é isósceles com $\angle BAC = 40^\circ$, então $\angle DCB = \angle ABC = 70^\circ$. Assim, como $\angle ABD = 20^\circ$, por hipótese, então $\angle DBC = 50^\circ$ e consequentemente $\angle CBD = 60^\circ$.*

2. *Também por hipótese, temos que ΔAED é isósceles de base $\overline{AE}$. Logo, $\angle DAE = \angle AED = 30^\circ$ e $\angle BAE = 10^\circ$.*

3. *Note que o ΔABD possui ângulos na razão 2 para 1. Assim, sobre $\overline{AB}$ tome o ponto F de modo a obter os triângulos ΔFBD e ΔAFD isósceles. Com efeito, $\angle AFD = 40^\circ$.*

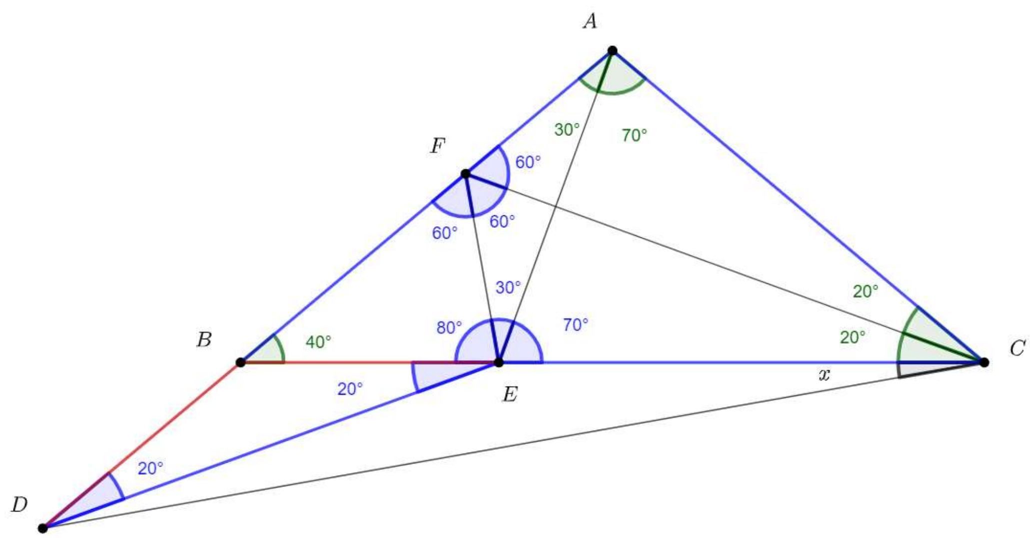
4. *Com o objetivo de obter um triângulo congruente a ΔAFD, tome G de forma que $\angle ADG = 20^\circ$ e $\overline{DC} = \overline{DG}$.*

5. *Perceba que assim, $\Delta EGD \equiv \Delta AFD$. Com efeito, $\angle DGC = 80^\circ$ e $\angle EGD = 40^\circ$.*

6. $Perceba\ que\ \angle EGC = 120^\circ + \angle EDC = 60^\circ = 180^\circ.$
$Portanto,\ o\ quadrilátero\ EGCD\ é\ cíclico.$

7. $Finalmente,\ como\ \angle DGC\ e\ \angle DEC\ enxergam\ o\ mesmo\ segmento\ \overline{DC}.$
$Logo,\ \angle DGC = \angle DGC\ \therefore\ \ x = 80^\circ.$

Problema 1. Em um triângulo ABC, o ângulo interno $\widehat{A}$ mede 100° e $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sobre o prolongamento do lado $\overline{AB}$, toma-se um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$ (o ponto B está entre A e D). Calcule a medida do ângulo $\angle BCD$.



Solução:

$Um\ fato\ que\ chama\ a\ atenção\ na\ figura\ é\ o\ de\ terem\ sido\ dados\ dois\ segmentos\ de\ mesmo\ tamanho\ com\ um\ ponto\ em\ comum,\ o\ ponto\ B.\ Uma\ escolha\ natural\ que\ pode\ ser\ feita,\ seria\ tomar\ um\ ponto\ E\ sobre\ \overline{BC}\ de\ tal\ sorte\ que\ \overline{BE} = \overline{AC},\ com\ isso\ ganhamos\ 2\ triângulos\ isósceles. Isso\ pareceu\ promissor\ e\ a\ minha\ solução\ busca\ explorar\ esse\ fato.$

1. $Tome\ E\ sobre\ \overline{BC}\ tal\ que\ \overline{BE} = \overline{AC}.\ Com\ efeito,\ \overline{BE} = \overline{BD}.\ Logo,\ os\ \Delta AEC\ e\ \Delta BDE\ são\ isósceles\ de\ bases\ \overline{AE}\ e\ \overline{DE},\ respectivamente.\ Assim,\ \angle EAB = 30^\circ.$

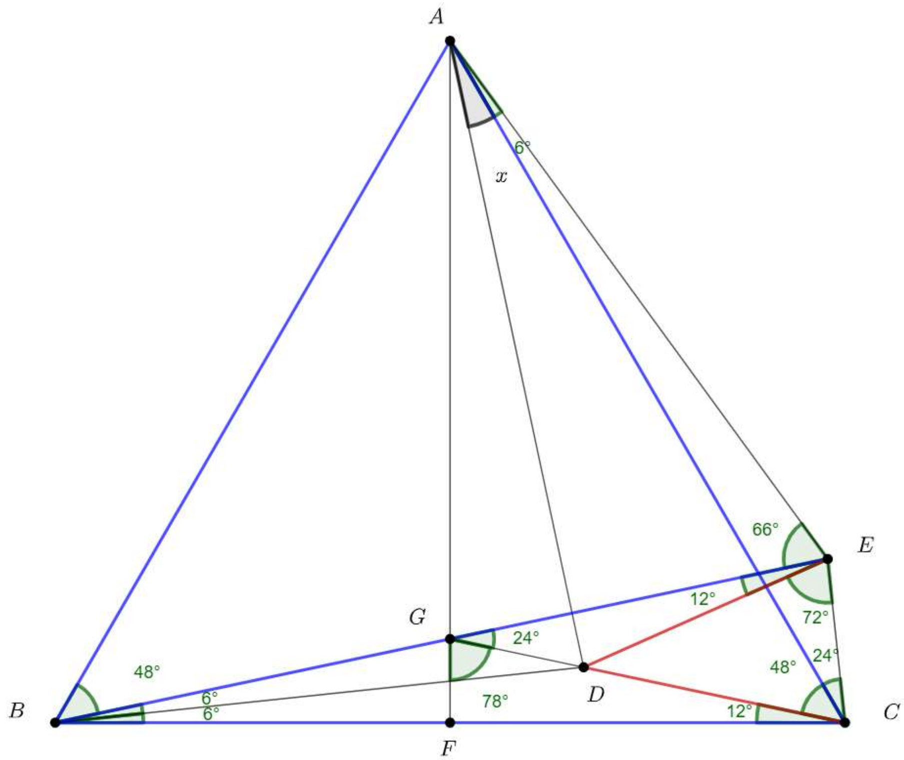
2. $Aqui\ temos\ duas\ possibilidades:\ 1)\ usar\ o\ lema\ do\ quadrilátero\ côncavo\ no\ quadrilátero\ ADEC,\ para\ afirmar\ \overline{ED} = \overline{EC};\ ou\ 2)\ trabalhar\ um\ pouco\ mais\ para\ chegar\ a\ essa\ conclusão\ traçando\ a\ mediatriz\ de\ \overline{AE}.$

3. $Seja\ F\ o\ encontro\ da\ mediatriz\ de\ \overline{AE}\ com\ \overline{AB}.\ Logo,\ \angle FEA = \angle EAF = 30^\circ.$
$Com\ efeito,\ \angle AFC = \angle CFA = \angle EFB = 60^\circ\ e\ \angle BEF = 80^\circ.$

4. $Note\ que\ os\ triângulos\ \Delta FDE \equiv \Delta FEC,\ pelo\ caso\ A.L.A.\ Logo,\ \overline{ED} = \overline{EC}.$

5. $Assim\ o\ \Delta EDC\ é\ isósceles\ de\ base\ \overline{DC}\ com,\ \angle EDC = \angle DCE\ e\ \angle EDC + \angle DCE = \angle DEB.$
$Portanto,\ 2x = 20^\circ\ \ \therefore\ \ x = 10^\circ.$

Problema extra (triângulo de Mustafa Yagci). Seja ABC um triângulo equilátero e D um ponto em seu interior tal que $\angle DCA = 6^\circ$ e $\angle BCD = 12^\circ$. Mostre que $\angle CAD = 18^\circ$.



<u>Solução:</u>

1. *Tome E o simétrico de C com relação a $\overline{BD}$. Assim, $\overline{BE} = \overline{BC}$ e $\overline{DE} = \overline{DC}$. Com efeito,* $\angle EBD = \angle DBC = 6^\circ$, $\angle DEB = \angle BEC = 12^\circ$ *e* $\angle ABE = 48^\circ$.

2. *Note que B é o cinrcuncentro de ΔACE. Com efeito,* $\angle ACE = 24^\circ$, $\angle EAC = 6^\circ$ *e* $\angle BEA = 66^\circ$.

3. *Seja $\overline{AF}$ a altura do triângulo ABC. Note que ela intercepta o segmento $\overline{BE}$ em G.*

4. *Perceba que G, D, e C estão colineares, pois $\overline{GC}$ deve fazer um ângulo de 12° com $\overline{BC}$, porém $\overline{DC}$ também faz o mesmo ângulo com $\overline{BC}$, portanto esses três pontos são colineares. Logo,* $\angle DGF = \angle CGF = 78^\circ$ *e* $\angle CGE = 24^\circ$.

5. *Note que o quadrilátero $GDEA$ é inscritível, pois* $\angle CGF = \angle DEA = 78^\circ$.

6. *Finalmente, note que $\angle EGD = \angle EAD$, pois enxergam o mesmo segmento $\overline{DE}$ em $GDEA$. Portanto,* $x + 6^\circ = 24^\circ \quad \therefore \quad x = 18^\circ$ $(c.q.d)$